PGCD, théorèmes de Bézout et de Gauss

Exercices d'entraînement

Terminale — Mathématiques expertes

Systèmes : équation – PGCD

Exercice 1

n° 77 · p. 122

Trouver les entiers naturels a et b tels que :

$$ab - b^2 = 2\,028 \qquad \text{et} \qquad \text{PGCD}(a, b) = 13.$$

Exercice 2

n° 78 · p. 122

1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\text{PGCD}(2n + 3, n) = 3$.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\text{PGCD}(2n + 3, n) = 1$.

Exercice 3

n° 79 · p. 122

Résoudre les systèmes suivants, avec $x, y \in \mathbb{N}$.

a) $\begin{cases} xy = 1\,512 \\ \text{PGCD}(x, y) = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy = 300 \\ \text{PGCD}(x, y) = 5 \end{cases}$

On donnera la réponse sous forme de tableau.

Recherche de PGCD

Exercice 4

n° 80 · p. 122

Soit n un entier naturel. On pose $a = 9n + 4$ et $b = 2n + 1$.
Montrer que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 5

n° 81 · p. 122

Soit n un entier naturel. On pose $a = n + 4$ et $b = 3n + 7$.
Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ suivant les valeurs de n.

Exercice 6

n° 82 · p. 122

Soient a et b deux entiers premiers entre eux. La fonction `bezout` programmée en Python est destinée à trouver les entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Dans un premier temps, on suppose $b \geqslant 2$.

```
1  def bezout(a,b):
2      r = 0
3      u = 0
4      while r != 1:
5          u = u + 1
6          r = a*u % b
7      v = int((1-a*u)/b)
8      return u,v
```

1. **a)** Expliquer la condition de la ligne 4.
   b) Pourquoi faut-il $b \geqslant 2$ pour que le reste calculé à la ligne 6 puisse valoir 1 ?
2. Que fait la fonction `int()` à la ligne 7 ?
3. Modifier cet algorithme pour qu'il puisse calculer u et v pour tout entier b (traiter aussi $b = 0$ et $b = \pm 1$). Effectuer le calcul de v en arithmétique entière exacte, sans passer par un flottant.
4. Faire fonctionner cet algorithme pour les couples $(a\,;\,b)$ suivants :
   a) $(37\,;\,15)$ **b)** $(11\,;\,-24)$.

Exercice 7 n° 83 · p. 122

Soit n un entier relatif. On pose $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.

1. Démontrer que le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.
2. Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le PGCD de A et de B.
3. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, avec $n \neq 1$, a-t-on :

$$\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1} \in \mathbb{Z} \text{ ?}$$

Théorème de Gauss

Exercice 8 n° 84 · p. 122

Soient a et b deux rationnels non nuls tels que $a + b$ et ab sont des entiers. On pose alors $a = \frac{p_1}{q_1}$ et $b = \frac{p_2}{q_2}$, fractions irréductibles avec $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$.

1. Montrer que q_1 divise q_2.
2. En déduire que $q_1 = q_2$.
3. Prouver alors que a et b sont des entiers.

Exercice 9 n° 85 · p. 122

Cinq entiers naturels a, b, c, d, e sont cinq termes consécutifs non nuls d'une suite géométrique de raison entière $q > 1$, telle que q est premier avec a. On sait de plus que $6a^2 = e - b$.

1. Montrer que $6a = q(q^3 - 1)$.
2. Montrer que q divise 6, puis déterminer les valeurs de q à examiner, compte tenu de $q > 1$.
3. En déduire les valeurs de a, b, c, d et e.

Montrer la rationalité d'un nombre

Exercice 10 n° 86 · p. 122

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Soit f le polynôme :

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3.$$

1. Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une racine de f, alors p divise 3 et q divise 2.
2. En déduire l'ensemble des racines rationnelles de f.

Exercice 11 n° 87 · p. 122

Soit f le polynôme :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10.$$

1. Montrer que si $f(x) = 0$ admet une solution rationnelle α, alors α est un entier.
2. Montrer que si α est une solution entière de $f(x) = 0$, alors α divise 10.
3. Trouver les éventuelles racines entières de f, c'est-à-dire les solutions entières de $f(x) = 0$.

Travailler l'oral

Exercice 12 n° 88 · p. 122

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergement : l'hébergement A et l'hébergement B.
Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €. Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.
On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B. Proposer une solution algorithmique et une solution arithmétique.

Exercice(s) issu(s) de SESAMATH (https://www.sesamath.net), licence libre CC BY-SA. Recomposés et rectifiés.