Continuité

Exercices d'entraînement

Terminale spécialité mathématiques

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1

manuel n° 40

Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.

c) Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ, puis déterminer ℓ.

Exercice 2

manuel n° 41

Soit la fonction f définie sur $I = [0;1]$ par :

$$f(x) = 1{,}4x(1-x).$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;0{,}5]$.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ, puis déterminer ℓ.

Exercice 3

manuel n° 42

Soit la fonction f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}.$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur I.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ, puis déterminer ℓ.

Exercice 4

manuel n° 43

Soit la fonction f définie sur $I = [0;1]$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. **a)** Justifier que f est continue sur I.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.

c) Montrer que, si $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, alors $f(x) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

d) Quelles sont les variations de f sur I ?

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ, puis déterminer ℓ.

Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Exercice 5

manuel n° 44

On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

Partie A

exercice 5

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;3]$.

3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

exercice 5

1. Calculer $f'(x)$, puis montrer que :

$$f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}.$$

2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et en ± 1.

3. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 6

manuel n° 45

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

Partie A

exercice 6

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée g', puis dresser le tableau de variations de la fonction g. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

3. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, en partant de $[1;2]$, déterminer un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-3}. Donner le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

exercice 6

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}.$$

3. Déterminer le signe de f' sur $]-1;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 7

manuel n° 46

Soit la fonction f définie sur $I =]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^3}{x+2}.$$

1. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = -\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2;+\infty[$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2;+\infty[$, puis montrer que $-1{,}5 < \alpha < 0$.

5. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, en partant de $[-1{,}5;0]$, donner un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-4}, ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

Exercice 8

manuel n° 47

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-5)(1-\mathrm{e}^{-x}).$$

Partie A

exercice 8

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7$.

1. Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.

2. Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\alpha \in [0;1]$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

exercice 8

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$.

3. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que :

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7},$$

puis en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-5)]$. En déduire que la droite D d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Partie C

exercice 8

Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite D et à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Soit u_n le réel défini par $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}.$$

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. Calculer la limite de la suite (u_n).

Limite et continuité

Exercice 9

manuel n° 48

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 10

manuel n° 49

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 11

manuel n° 50

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} & \text{si } x \neq 9, \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } x = 9. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité en 9.

2. Contrôler ce résultat à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 12

manuel n° 51

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Montrer que la fonction f est continue en 0.

Exercice 13

manuel n° 52

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ m & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour $x \neq 0$, la fonction f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{-x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b) Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue en 0 ?

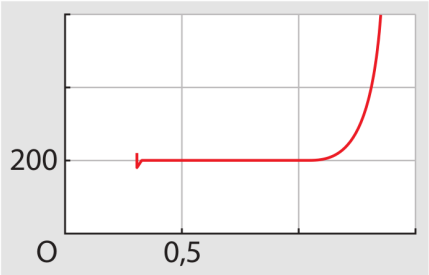
Exercice 14

manuel n° 53

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}} & \text{si } x \neq 0, \\ 200 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Voici la reproduction d'un écran d'une calculatrice représentant la fonction f sur l'intervalle $[0; 1{,}5]$.



1. Au vu du graphique, peut-on dire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$?

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, puis justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Comment peut-on expliquer la représentation graphique de la calculatrice ?

Solution d'équation avec une fonction continue

Exercice 15

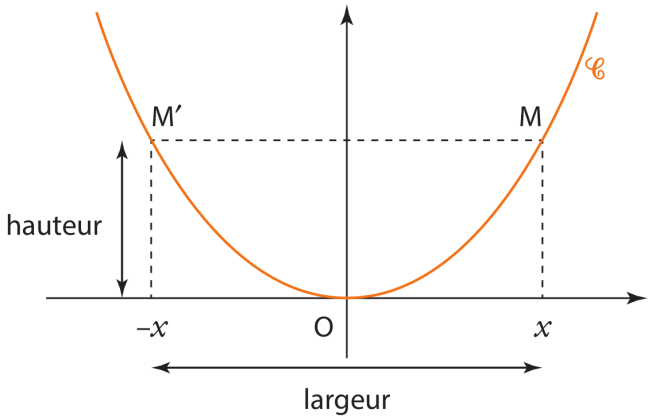
manuel n° 54

Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.



On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.

Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation :

$$(E) : \quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à résoudre $(\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x - 1 = 0$.

c) On pose $X = \mathrm{e}^x$. Montrer alors que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution x_1 tel que $\mathrm{e}^{x_1} = 2 + \sqrt{5}$.

3. On donne le tableau de signes de $f'(x)$.

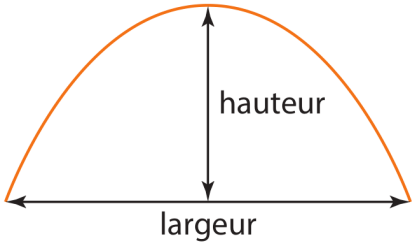
x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive telle que $2 < \alpha < 3$.

c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

4. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure suivante.



Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur. La largeur de cet arc, exprimée en mètres, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$e^{t/39} + e^{-t/39} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

Travailler le Grand Oral

Exercice 16

manuel n° 55

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction E correspond à la fonction partie entière.

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de la fonction f en 0 ?

2. Démontrer à l'oral devant la classe cette conjecture en calculant les limites à gauche et à droite de 0.

Exercice(s) issu(s) de SESAMATH (https://www.sesamath.net), licence libre CC BY-SA. Énoncés recomposés et corrigés.